

前言

105 年的數學乙考題平易近人，只要同學學習過程中基本觀念弄清楚，應試時計算不要失誤，得高分不是難事。所以學習過程中不能投機取巧，必須務實，機會來臨時就會有好收穫。

試題命題趨向與分布

一、回顧 104 年指考數學乙的一些試題：

單選題 2. 坐標平面上， x 坐標與 y 坐標皆為整數的點稱為「格子點」。設 n 為正整數，已知在第一象限且滿足 $x+2y \leq 2n$ 的格子點 (x, y) 的數目為 a_n 。則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$ 的值為下列哪一個選項？

- (1) 0 (2) 1 (3) $\frac{4}{3}$ (4) 2 (5) 4

與 105 年指考數學乙選填題 C 比較：都是認識等差數列，並求簡易極限。

多選題 6. 設 $f(x)$ 為一實係數多項式，且 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)^2$ 的餘式為 $(x-2)^2 + g(x)$ ，其中 $g(x)$ 為一次多項式。請選出正確的選項。

- (1) 若知道 $f(1)$ 及 $f(2)$ ，則可求出 $g(x)$
 (2) $f(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式是 $g(2)$
 (3) $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式是 $g(1)$
 (4) $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 的餘式是 $g(x)$
 (5) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式是 $x-2+g(x)$

與 105 年指考數學乙多選題 4 比較：都是認識多項式的除法與餘式。

二、105 年數學乙試題與單元的配分情形：(只列出 3 顆星部分)

數學乙測驗內容		題 型				配分
		單選題	多選題	選填題	非選擇題	
數學 I	數與式 (數線上的幾何)	第 2 題 (6 分)				6 分
	多項式函數 (不含複數)	第 1 題 (6 分)	第 4 題 (8 分)			14 分
	指數、對數函數		第 6 題 (8 分)			8 分
數學 II	排列、組合 (邏輯、集合與計數原理、排列與組合)		第 5 題 (8 分)			8 分
	機率			第 A 題 (6 分)	第一題(2) (6 分)	12 分
	數據分析		第 8 題 (8 分)			8 分
數學 III	直線與圓 (直線方程式及其圖形、線性規劃)				第二題 (12 分)	12 分
	平面向量	第 3 題 (6 分)	第 7 題 (8 分)			14 分
數學 IV	矩陣 (線性方程組與矩陣、矩陣的運算、矩陣的應用)			第 B 題 (6 分)		6 分
數學乙 I	機率統計 II				第一題(1) (6 分)	6 分
數學乙 II	極限與函數 (數列及其極限、無窮等比級數) (不含夾擠定理)			第 C 題 (6 分)		6 分

試題詳解與分析

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 下列哪一個選項是方程式 $7x^5 - 2x^4 + 14x^3 - 4x^2 + 7x - 2 = 0$ 的根？

- (1) -1 (2) $\frac{1}{7}$ (3) $-\frac{1}{7}$ (4) $\frac{2}{7}$ (5) $-\frac{2}{7}$

【答 案】(4)

【概念中心】多項式方程式的有理根

【命題出處】南一版數學第一冊第 2 章多項式函數

【試題解析】設 $f(x) = 7x^5 - 2x^4 + 14x^3 - 4x^2 + 7x - 2$ ，

發現奇次項的係數都是正，偶次項的係數都是負

$$\therefore f(-1) < 0, f(-\frac{1}{7}) < 0, f(-\frac{2}{7}) < 0$$

利用綜合除法，得 $f(\frac{1}{7}) \neq 0, f(\frac{2}{7}) = 0 \Rightarrow$ 選項中的 $\frac{2}{7}$ 是根，

選(4)。

2. 考慮有理數 $\frac{n}{m}$ ，其中 $m、n$ 為正整數且 $1 \leq mn \leq 8$ 。則這樣的數值（例如 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{2}{4}$ 同值，只算一個）共有幾個？

- (1) 14 個 (2) 15 個 (3) 16 個 (4) 17 個 (5) 18 個

【答 案】(4)

【概念中心】整數相乘與最簡分數

【命題出處】南一版數學第一冊第 1 章數與式

【試題解析】 $1 \leq mn \leq 8$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
m	1~8	1~4	1~2	1~2	1	1	1	1
不計		$\frac{2}{2}, \frac{2}{4}$		$\frac{4}{2}$				

\therefore 有理數 $\frac{n}{m}$ 有 $8+2+2+1+1+1+1+1=17$ (個)

選(4)。

5. 甲先生、乙先生、丙先生、丁先生四位男士以及 A 小姐、B 小姐、C 小姐、D 小姐四位女士想要混搭兩部計程車，每車載有四名乘客。已知：

- (一) 甲先生與 A 小姐同車
- (二) 乙先生與 B 小姐同車
- (三) C 小姐與 D 小姐不同車

請選出正確的選項。

- (1) A 小姐與 D 小姐必不同車
- (2) 甲先生與 B 小姐必不同車
- (3) 乙先生與丙先生必同車
- (4) 如果乙先生與丁先生同車，則丙先生與 B 小姐必同車
- (5) 如果 D 小姐與乙先生同車，則 C 小姐與 A 小姐必同車

【答 案】(2)(5)

【概念中心】邏輯與樹形圖分析

【命題出處】南一版數學第二冊第 2 章排列、組合

【試題解析】(甲 A)，(乙 B) 又 C 與 D 不同車 \Rightarrow (甲 A)，(乙 B) 不同車。

搭乘方式：(甲 A,)，(乙 B,)。

安排丙、丁；C, D (不同車)。

(1) A, D 可能同車，可能不同車。

(2) 甲, B 一定不同車。

(3) 乙, 丙可能同車，可能不同車。

(4) 若乙, 丁同車：(甲 A,)，(乙 B, 丁,)；

丙 B 同車時，CD 必同車 (不合“已知”)。

(5) 若 D, 乙同車：(甲 A,)，(乙 B, D,)

\therefore C, D 必須不同車 \therefore C, A 同車

選(2)(5)。

6. 設 $a = 10^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ， $b = a^{\sqrt{2}}$ 。請選出正確的選項。

- (1) $1 < a$
- (2) $a < \sqrt{3}$
- (3) $a^2 < b^{\sqrt{3}}$
- (4) $10^{0.4} < b < 10^{0.5}$
- (5) $(ab)^{\sqrt{2}} < 10$

【答 案】(1)(3)(4)

【概念中心】指數律、指數函數大小的比較

【命題出處】南一版數學第一冊第 3 章指數、對數函數

【試題解析】(1) $a = 10^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} > 10^0 = 1$ 。

(2) $a^2 = (10^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}})^2 = 10^{2-\sqrt{2}} > 10^{0.5} = \sqrt{10} > 3 \Rightarrow a > \sqrt{3}$ 。

(3) $b = a^{\sqrt{2}}$ ，由(1)： $a > 1$ ，得 $b > 1$ $\therefore a^2 = (a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = b^{\sqrt{2}} < b^{\sqrt{3}}$

(4) $b = a^{\sqrt{2}} = (10^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}})^{\sqrt{2}} = 10^{\sqrt{2}-1} = 10^{0.414\dots} \therefore 10^{0.4} < b < 10^{0.5}$

(5) $(ab)^{\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}} \cdot b^{\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}} \cdot a^2 = a^{2+\sqrt{2}} = (10^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}})^{2+\sqrt{2}} = 10$ 。

選(1)(3)(4)。

7. 坐標平面上 O 為原點， P 點坐標為 $(1, 0)$ ，直線 L 的方程式為 $x - 2y = -4$ 。請選出正確的選項。

- (1) 在直線 L 上可以找到一點 A ，滿足向量 \overrightarrow{OP} 與 \overrightarrow{OA} 平行
- (2) 在直線 L 上可以找到一點 B ，滿足向量 \overrightarrow{OP} 與 \overrightarrow{OB} 垂直
- (3) 在直線 L 上可以找到一點 C ，滿足向量 \overrightarrow{OC} 與 \overrightarrow{PC} 垂直
- (4) 在直線 L 上可以找到一點 D ，滿足 $\overline{PD} = 2$
- (5) 在直線 L 上可以找到一點 E ，滿足 $\triangle EOP$ 為等腰三角形

【答 案】(1)(2)(5)

【概念中心】平面上的直線之方向向量與法向量、參數式、點到線的距離

【命題出處】南一版數學第三冊第 2 章直線與圓、第 3 章平面向量

【試題解析】 $L: x - 2y = -4$ ，法向量 $(1, -2)$ ，

$$\text{參數式為 } \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases}, t \text{ 為任意實數。}$$

$$(1) \overrightarrow{OP} = (1, 0), \text{ 取 } t = -2 \Rightarrow A(-4, 0), \text{ 使 } \overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OA}。$$

$$(2) \overrightarrow{OP} = (1, 0), \text{ 取 } t = 0 \Rightarrow B(0, 2), \text{ 使 } \overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OB}。$$

(3) (法 1) 見右圖， $\angle C$ 不可能為直角。

(法 2) 取 $C(2t, 2+t)$ ，

$$\text{令 } \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{PC} = (2t, 2+t) \cdot (2t-1, 2+t) = 5t^2 + 2t + 4 = 0$$

\therefore 判別式 $< 0 \therefore t$ 沒有實數解 \Rightarrow 點 C 不存在

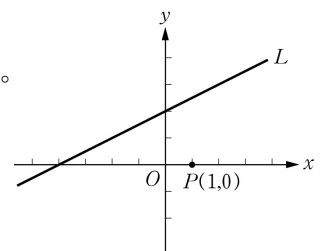
$$(4) \text{ (法 1) } \therefore d(P, L) = \left| \frac{1-0+4}{\sqrt{5}} \right| = \sqrt{5} > 2 \therefore D \text{ 不存在}$$

(法 2) 取 $D(2t, 2+t)$ ，令 $\overline{PD} = 2$

$$\Rightarrow (2t-1)^2 + (2+t)^2 = 4 \Rightarrow 5t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t \text{ 不是實數 } \therefore D \text{ 不存在}$$

(5) 作 \overline{OP} 的中垂線交 L 於一點，就是所求的點 E 。

選(1)(2)(5)。



8. 某社區有一千位居民，其個人月所得少於 10,000 元者占 30%，介於 10,000 元及 20,000 元間者占 10%，介於 20,000 元及 40,000 元間者占 30%，介於 40,000 元及 80,000 元間者占 30%。請選出正確的選項。

- (1) 該社區個人月所得的中位數介於 20,000 元及 40,000 元間
- (2) 使用簡單隨機抽樣自該社區中抽出一位居民，其個人月所得在上述的四個區間中，以介於 10,000 元及 20,000 元間的機率最低
- (3) 該社區的個人月所得平均，不可能高過 40,000 元
- (4) 該社區的個人月所得平均，不可能低過該社區的個人月所得中位數
- (5) 若該社區新搬入一位居民，其月所得為 200,000 元，則該社區的個人月所得平均將增加，但增加量不會多過 200 元

【答 案】(1)(2)(5)

【概念中心】分組、中位數、平均數的認識

【命題出處】南一版數學第二冊第 4 章數據分析

【試題解析】	個人月所得	0~1 萬	1~2 萬	2~4 萬	4~8 萬	(單位：元)
	所占比例	30%	10%	30%	30%	

(1) 由所占比例得知，該社區個人月所得的中位數介於 2 萬及 4 萬之間。

(2) 由所占比例得知：

使用簡單隨機抽樣抽出一位居民，當個人月所得介於 1 萬及 2 萬元之間時機率最低。

(3) 由各組的上限著手，個人月所得平均最高達

$1 \text{ 萬} \times 30\% + 2 \text{ 萬} \times 10\% + 4 \text{ 萬} \times 30\% + 8 \text{ 萬} \times 30\% = 4.1 \text{ 萬}$ ，
該數高過 4 萬。

(4) 由各組的下限著手，個人月所得平均最低達

$0 \text{ 萬} \times 30\% + 1 \text{ 萬} \times 10\% + 2 \text{ 萬} \times 30\% + 4 \text{ 萬} \times 30\% = 1.9 \text{ 萬}$ ，
該數低於個人月所得中位數(由(1))。

(5) 設原來 1000 位居民的個人月所得平均為 a 元，

1001 位居民的個人月所得平均數為

$$\frac{a \times 1000 + 200000}{1001} = a \times \frac{1000}{1001} + \frac{200000}{1001} < a + 200$$

\therefore 新增 1 人後，該社區的個人月所得平均增加，但增加量不會多過 200 元
選(1)(2)(5)。

三、選填題 (占 18 分)

說明：第 A 至 C 題為選填題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(9-18)。每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 不透明袋中有三顆白球及三顆紅球。從袋中每次取出一球依序置於桌面，每次每顆球被取出的機率相同。全部取出後，前三顆球中有相鄰兩球同為白球的機率為 $\frac{\textcircled{9}}{\textcircled{10}\textcircled{11}}$ 。(請化為最簡分數)

【答案】 $\frac{7}{20}$

【概念中心】計數原理的應用與基本機率問題

【命題出處】南一版數學第二冊第 3 章機率

【試題解析】6 顆球排成一列，前三顆球中有相鄰兩球同為白球的情形為

① 白白○○○○；② ○白白○○○，

機率 = $P(\text{前 2 白}) + P(\text{後 2 白}) - P(\text{前 3 白})$

$$= \frac{3 \times 2 \times 4! + 3 \times 2 \times 4! - 3! \times 3!}{6!} = \frac{7}{20}。$$

B. 設 x, c 為實數，方陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & x \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ 。已知 A 的反方陣恰好是 B 的 c 倍
(其中 $c \neq 0$)，則數對 $(x, c) = (\underline{\quad\quad\quad}^{(12)}, \underline{\quad\quad\quad}^{\frac{(13)}{(14)(15)}})$ 。(請化為最簡分數)

【答 案】 $(3, \frac{1}{13})$

【概念中心】矩陣相等的條件，求反方陣

【命題出處】南一版數學第四冊第 3 章矩陣

【試題解析】 $A^{-1} = cB$,

$$\frac{1}{3x+4} \begin{bmatrix} x & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & x \end{bmatrix}, \text{ 整理後}$$

$$\text{由第二列、第一行得 } \frac{2}{3x+4} = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{3x+4},$$

$$\text{由第一列、第一行得 } \frac{x}{3x+4} = 3c = \frac{3}{3x+4}, \text{ 解得 } x=3, c = \frac{1}{13}$$

$$\therefore \text{數對 } (x, c) = (3, \frac{1}{13})$$

C. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一等差數列。已知 $a_2 + a_4 + a_6 = 186$ ， $a_3 + a_7 = 110$ 。令 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 。則

極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n^2} = \frac{\frac{(16)(17)}{(18)}}{\quad\quad\quad}$ 。(請化為最簡分數)

【答 案】 $\frac{-7}{2}$

【概念中心】認識等差數列，求簡易極限

【命題出處】南一版數學第二冊第 1 章數列與級數、選修數學下冊(乙版)第 1 章極限與函數

【試題解析】設首項 a ，公差 d ，

$$186 = (a+d) + (a+3d) + (a+5d) = 3a + 9d \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$110 = (a+2d) + (a+6d) = 2a + 8d \cdots \cdots \textcircled{2}$$

由①②，解得 $a=83, d=-7$ 。

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n[2 \times 83 + (n-1) \cdot (-7)]}{2} = \frac{n(-7n+173)}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(-7 + \frac{173}{n} \right) = \frac{-7}{2}$$

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、設隨機變數 X 表示投擲一不公正骰子出現的點數， $P(X=k)$ 表示隨機變數 X 取值為 k 的機率。已知 X 的機率分布如下表： $(x, y$ 為未知常數)

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	x	y	y	x	y	y

又知 X 的期望值等於 3。

(1) 試求 x, y 之值。（6 分）

(2) 投擲此骰子兩次，試求點數和為 3 的機率。（6 分）

【答 案】(1) $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{12}$ ；(2) $\frac{1}{18}$

【概念中心】認識期望值，求簡易機率

【命題出處】南一版選修數學上冊（乙版）第 1 章機率統計、第二冊第 3 章機率

【試題解析】(1) $1 = \sum_{k=1}^6 P(X=k) = x + y + y + x + y + y = 2x + 4y \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$3 = E(X) = \sum_{k=1}^6 k \cdot P(X=k)$$
$$= 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot y + 4 \cdot x + 5 \cdot y + 6 \cdot y = 5x + 16y \cdots \textcircled{2}$$

由①②得 $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{12}$ 。

(2) 兩次點數和為 3 之情形為 $(1, 2), (2, 1)$ ，

$$\text{機率} = x \cdot y + y \cdot x = 2xy = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{18}。$$

二、某農業公司計畫向政府承租一筆平地和一筆山坡地，分別種植平地作物 A 和山坡地作物 B 。已知平地每一單位面積的年租金是 30 萬元，山坡地每一單位面積的年租金是 20 萬元；公司一年能夠提供土地租金的上限是 80 萬元。平地作物 A 的種植成本每單位面積一年是 40 萬元，山坡地作物 B 的種植成本每單位面積一年是 50 萬元；公司一年能夠提供種植成本的上限是 130 萬元。每年收成後，作物 A 每單位面積的利潤是 120 萬元，作物 B 每單位面積的利潤是 90 萬元。請問公司一年應租平地和山坡地各多少單位面積，收成後可以獲得最大利潤？又此時的最大利潤為何？（12 分）

（註：所租土地的面積並不限制一定要是整數單位。）

【答 案】(1) 租平地 2 單位，山坡地 1 單位；(2) 最大利潤為 330 萬元

【概念中心】線性規劃

【命題出處】南一版數學第三冊第 2 章直線與圓

【試題解析】設公司一年租平地 x 單位面積，租山坡地 y 單位面積，
由題意：

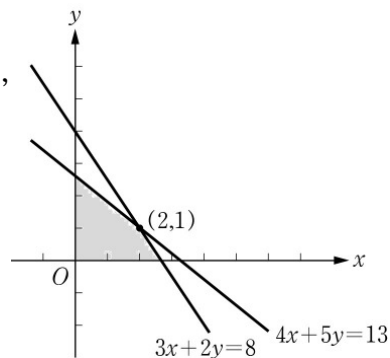
$$\text{土地租金：} 30x + 20y \leq 80 \Rightarrow 3x + 2y \leq 8，$$

$$\text{土地種植成本：} 40x + 50y \leq 130 \Rightarrow 4x + 5y \leq 13，$$

$$\text{但 } x \geq 0, y \geq 0，$$

$$\text{利潤：} 120x + 90y = 30(4x + 3y) \text{ (萬元)，}$$

作圖如右：



頂點	$(0, 0)$	$(\frac{8}{3}, 0)$	$(2, 1)$	$(0, \frac{13}{5})$
$30(4x + 3y)$	0	320	330	234

$\therefore (x, y) = (2, 1)$ 時，有最大利潤

即租平地 2 單位，山坡地 1 單位種植，可得最大利潤 330 萬元。



綜觀前述，要了解“指考數學乙”的命題內容主題：

- (1) 多項式的除法與餘式的概念。
- (2) 指數、對數函數的大小比較。
- (3) 有關排列、組合的基本分析能力 —— 邏輯、計算方法、樹形圖。
- (4) 線性規劃
- (5) 機率、統計 \searrow 每年必考。
- (6) 平面向量與矩陣的基本概念。
- (7) 簡易極限。

學生在學習上，基本觀念要弄清楚最重要，要有耐心去讀懂題目的意涵，再想想學過的相關概念，才能觸類旁通，基礎穩固。