## 複數的源流

### (一)新數系

代數的基礎是數系，在 1700 年代，所有現今大家熟悉的數系----正整數、分數、無理數、負數及複數都已經被發現了。不過發現歸發現，但對新數系求了解幾乎是整個十八世紀數學家努力的目標。其中尤其是負數及複數，人們接受它們的過程相當緩慢。

比如說，一直到十八世紀的後半期，Euler 還一直認爲每一個負數都比∞大。同時，他還證明：(－1)(－1)＝＋1，理由是(－1)‧(－1)一定是＋1 或是－1，但是 1‧(－1)＝－1，因此(－1)(－1)＝＋1。一直到 1831 年，著名的邏輯學家 De Morgan (1806～1871)還在他寫的書「數學研究與疑難」中說：虛數$\sqrt{-a}$與負數－$b$ 有一相似的地方，即當它們出現爲某一問題的解時，所表示的意義不是與原問題不一致，就是問題是荒謬的。當我們考慮問題的真正意義時，虛數與負數同樣只是假想的數。從這些例子，我們約略可知，人們接受新數系是相當困難的。

### (二)複數初現

複數的發現是解方程式時自然產生的。

最先介紹複數的是Cardan(1501～1576，義大利人，三次方程式公式解的發明人)但是一直到 1700 年，人們一直沒有注意這新數系。

Cardan 介紹複數的起因是爲了解方程式。在 1545 年時，他考慮如下的問題「將 10 分成兩部分，使這兩數的乘積等於 40」，並求解如下：

設其中一數爲 $x$」則另一數爲 10－$x$」依題意得

$$x(10-x)=40$$

解得

$$x=5+\sqrt{-15} \text{ 或 } x=5-\sqrt{-15}.$$

即和等於 10，而乘積等於 40 的兩個數都是虛數。

Cardan 就在處理這問題時，自然地引出複數，後來在求三次方程式的公式解時，他引進了更多的複數。

十六世紀時，Bombelli 同樣也將複數視爲三次方程式的解，同時他也介紹了現今我們所知的複數的四則運算。不過，在 Bombelli 的心目中，複數仍然是沒有用並且是詭辯的符號而已。

A. Girard 則認爲複數並非全然無用，至少複數可當做方程式的公式解，使公式解具備完整性及一般性。

笛卡兒也拒絕接受複數根，他稱複數是「虛構的」。在他的書*La Géométric*中，他說“真正的根與假的(指負數)根並非恆是實際的數；有時它們可能是虛構的數”。

他進一步討論，如果我們得到負數根(笛卡兒認爲負數不是實際的數)，至少我們可以將方程式轉化成另一方程式，使新方程式的根是實際的數(即正數)。可是如果我們解方程式時得到的是虛數根，我們就一籌莫展了。因此虛數根不是實際的數，只是虛構的。它們根本就不是數。笛卡兒將方程式的實根與虛根區分得很清楚。

甚至牛頓(1642～1727)都不認爲虛數根是重要的，原因大概是當時虛數除了做爲方程式的解外，缺乏實際的物理意義的緣故。在*Univer sal Arithmetic*一書中，牛頓指出，如果一個問題沒有物理的或幾何的具體解，那麼就會有虛數解。

微積分學的發明者是牛頓與萊布尼茲(Leibniz,1646～1716)。萊布尼茲同樣也不太了解複數。雖然他很正式地利用複數，可是他並不了解複數的特性。

### (三)積分迫用複數

從解方程式中發現複數後，緊接著複數就出現在微積分內。

上文提到萊布尼茲曾經很正式地利用複數，到底他怎麼用的呢？萊布尼茲是在介紹積分技巧時用到複數的。考慮如下的積分

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

將$\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$化成部分分式，設

$$\frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{k_1}{Ax+B}+\frac{k_2}{Cx+D}$$

即

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=k_1\int \frac{dx}{Ax+B}+k_2\int \frac{dx}{Cx+D}$$

上式右邊的兩項積分都有反導數。

因爲$ax^2+bx+c$的一次因式的係數可能是虛數，所以$Ax+B$，$Cx+D$中的$A$，$B$，$C$，$D$都有可能是虛數。萊布尼茲不管$A$，$B$，$C$，$D$是實數或虛數，他都一律利用對數的性質運算如下：

$$\int \frac{dx}{Ax+B}=\frac{1}{A}\log(Ax+B)+k\text{，}k\text{ 爲常數}$$

因此萊布尼茲實際上已經引進了複數的對數。雖然他對複數還有點模糊，不過他毫不遲疑地利用上面的方法進行積分，並且還聲稱，複數的出現是沒有害的。

萊布尼茲的這個積分方法，白努利(Johann Bernoulli,1667～1748)也一再引用。在1702 年，白努利在一篇論文中有如下的討論：

考慮

$$\frac{a}{b^2-z^2}dz$$

令

$$z=\frac{b(t-1)}{t+1}$$

則

$$b^2-z^2=b^2-\frac{b^2(t-1)^2}{(t+1)^2}=\frac{4b^2t}{(t+1)^2}\text{，}$$

$$dz=\frac{b(t+1)-b(t-1)}{(t+1)^2}dt=\frac{2b}{(t+1)^2}dt$$

因此

$$\frac{a}{b^2-z^2}dz=\frac{a(t+1)^2}{4b^2t}\cdot\frac{2b}{(t+1)^2}dt=\frac{a}{2bt}dt$$

再考慮

$$\frac{dz}{b^2+z^2}$$

如果令

$$z=\frac{\sqrt{-1}b(t-1)}{t+1}$$

那麼

$$dz=\frac{2\sqrt{-1}b}{(t+1)^2}dt\text{，}$$

$$b^2+z^2=\frac{b^2(t-1)^2}{(t+1)^2}=\frac{4b^2t}{(t+1)^2}$$

所以

$$\frac{dz}{b^2+z^2}=\frac{(t+1)}{4b^2t}\cdot\frac{2\sqrt{-1}b}{(t+1)^2}dt=\frac{\sqrt{-1}}{2bt}dt=\frac{\sqrt{-1}}{2bt}=\frac{-dt}{\sqrt{-1}2bt}$$

上式最後一項是一微分式，其反導數是複數的對數。因爲原來的微分式$\frac{dz}{b^2+z^2}$的

反導數是 $\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{z}{b}$ ，白努利就利用這方法建立了三角函數與對數函數間的關係。

## (四)棣美弗定理的發現

在 1714 年，R. Cotes(1682～1716)發表了一個關於複數的定理，利用現代的符號，可以敘述如下：

$$\sqrt{-1}\,\phi=\log(\cos\phi+\sqrt{-1}\sin\phi) \tag{1}$$

在 1740 年 10 月 18 日，尤拉Euler寫給白努利的一封信中，尤拉曾經說：

$$y=2\cos x \text{ 及 } y=e^{\sqrt{-1}x}+e^{-\sqrt{-1}x}$$

同是某一個微分方程的解，因此一定相等。即

$$\cos s=\frac{e^{\sqrt{-1}s}+e^{-\sqrt{-1}s}}{2} \tag{2}$$

由 cos $s$ 可求得

$$\sin s=\frac{e^{\sqrt{-1}x}+e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}} \tag{3}$$

在 1748 年，Euler 證明 Cotes 的結果，(1)式實際上可以由(2)(3)兩式直接導出。

就在上面這些發展的同時，棣美弗(A braham de Moivre, 667～1754)發現了所謂的棣美弗定理。

在 1722 年的一篇論文中，棣美弗利用他在 1707 年發表的一個結果說：設有兩個弧 $\alpha$ 及 $\beta$ ，度量比為 1：$n$. 定義弧 $\alpha$ 的versine為 $1-\cos\alpha$，以vers $\alpha=1-\cos\alpha$ 表之。

令 $x$ 和 $t$ 分別代表 vers$\alpha$及 vers$\beta$ ，則 $x$，$t$ 滿足如下的兩個方程式

$$\begin{cases}1-2z^n+z^{2n}=-2z^n t\\ 1-2z+z^2=-2zx\end{cases}$$

如果從上面的兩個方程式中消去 $z$，即可得到 $x$ 與 $t$ 的關係式。

事實上，所謂的棣美弗定理已經隱藏在$x$，$t$的關係式中了。即令

$$x=1-\cos\phi,\ t=1-\cos n\phi$$

那麼就可推得

$$(\cos\phi\pm\sqrt{-1}\sin\phi)n=\cos n\phi\pm\sqrt{-1}\sin n\phi \tag{4}$$

(4)式就是棣美弗定理。實際上，棣美弗從來沒有將(4)式寫出來。並且棣美弗也認為上面的$x$，$t$的方程組只當$n$為正整數才成立，所以尤式也同樣只當$n$為正整數才成立。(4)式實際上是Euler利用棣美弗的結果幫忙導出的，同時Euler也將棣美

弗定理推廣至整個實數系。

## (五)Euler 在複數中的掙扎

Euler 嘗試了解複數的情形，可以在他的書中看出。他的書 *Voℓℓst änℓdige Anℓeitung Zur Aℓgebra*(即代數導論全集，1768～1769 最先在蘇俄印行，1770 年在德國印行，此書是十八世紀最好的代數教科書)中有一段話：

「因為所有的實數一定是大於零，小於零或者等於零，所以很顯然地負數的平方根不可能包含於實數中。因此我們必須稱它們為不可能的數。這情形就可使我們得到這些數的概念，它們的本質是不可能的數，平常就稱它們為虛數或幻想數，理由是它們只存在於我們的想像中。」

Euler 處理複數時，也曾經出現一些錯誤。在他的代數書中，他說因為

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$$

所以

$$\sqrt{-1}\sqrt{-4}=\sqrt{4}=2$$

顯然地，Euler 沒有注意 $\sqrt{a}\,\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 當 $a<0$，$b<0$ 時不成立。另外，他也得到

$$i^i=0.2078795763$$

實際上

$$i^i=e^{i\ln i}$$

而 $\ln i$ 是一個多值函數，Euler 事實上只列出一個 $i^i$ 的可能值而已。Euler 在 1746 年寫給 Goldbach 的信中就曾提及 $i^i$ 的這個值。

雖然 Euler 稱複數為不可能的數，但 Euler 說複數還是有用。什麼時候用到呢？在 Euler 的心目中認為當我們處理一些不知有沒有答案的問題時，複數就有可能被用到。例如：將 12 分成兩數，使兩數乘積等於 40，則該兩數為 $6+\sqrt{-4}$ 與 $6-\sqrt{-4}$。此時，Euler 說因為所得到的是不可能的數複數，既然答案是不可能的數，所以這問題無解。換句話說，此時 *Euler* 不承認複數是數。

Euler 最後由於對指數、對數與三角函數之間的關係有徹底的研究，因此能將複數的對數的真面目顯現出來。不過在十八世紀，這偉大的成果並沒發揮其該

有的影響。

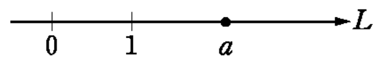
在我們的教科書中，我們說歷史上第一位以符號 $i$ 來代表 $\sqrt{-1}$ 的是 Euler。不過 Euler 在他的初期研究中，他是以 $i$ 代表無限大，到了 1777 年後，Euler 才固定以 $i$ 代表 $\sqrt{-1}$ 。

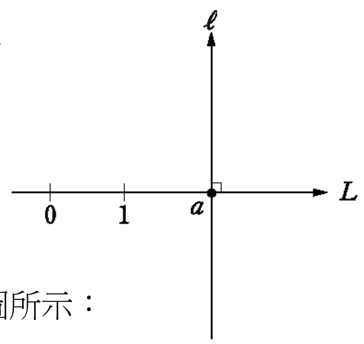
## (六)實係數二次方程式複數根的圖解

華理斯John　Wallis(1616～1703)是英國牛津大學數學系教授，劍橋大學畢業。在 1685 年，Wallis寫了一本*Aℓgebra*在這本代數書中，Wallis將實係數二次方程式的複數根的圖解畫出來了。Wallis所畫的圖其實和我們現在在複數平面畫的差不多，只是Wallis沒有直接利用直角坐標中的*y*軸來當虛軸。

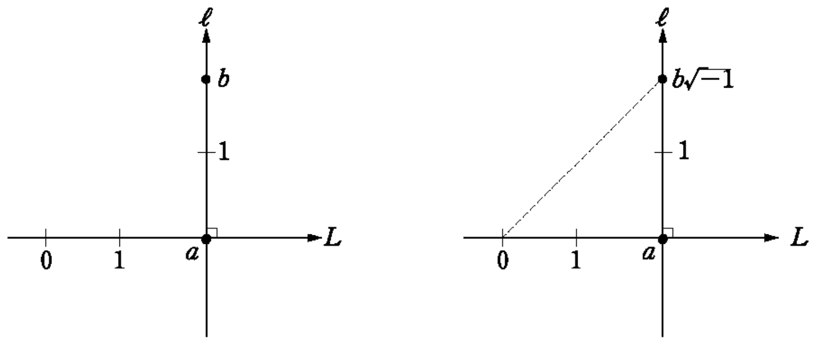
Wallis 說複數其實並不比負數荒謬。既然負數可以在有方向的線上表示出來，那麼在平面上應該也有辦法將複數表示出來才對。

首先 Wallis 畫一條數線 $L$ 如下：




如果一實係數二次方程式的根是複數 $a+bi$，$c+di$，那麼 Wallis 就將其實數部分標在這數線上，如上圖中的 $a$。接著過 $a$ 點作一直線 $\ell$ 垂直於此數線 $L$，如右圖所示：在新畫的這垂直線 $\ell$ 上，同樣定一正向，並選取單位長(與 $L$ 的單位同) ，如此得一數線 $\ell$ 。在 $\ell$ 上標出 $b$，再將 $b$ 點標成 $b\sqrt{-1}$ ，則此點即爲代表 $a+b\sqrt{-1}$ 的點，如下圖所示：



Wallis 作出的圖跟我們現行在複數平面的標點法一樣，他的作法正確，只是沒有其他的用途。

### (七)複數都形如 $a+bi$

我們定義形如 $a+bi$，$a$，$b$ 爲二實數的數叫做複數。這定義也告訴我們只要是複數都一定可表成 $a+bi$ 的形式。換句話說，複數經過加、減、乘、除、開方和乘冪運算後，仍然都可寫成 $a+bi$ 的形式。例如，

$$\frac{5+2i}{3-i}=\frac{(5+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{13+11i}{10}=\frac{13}{10}+\frac{11}{10}i$$

$$\sqrt[3]{5+2i}=(5+2i)^{\frac{1}{3}}=\left[\sqrt{29}\left(\frac{5}{\sqrt{29}}+i\frac{2}{\sqrt{29}}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$=\left[\sqrt{29}\,(\cos\theta+i\sin\theta)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$=\sqrt[6]{29}\,(cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3})$$

$$=\sqrt[6]{29}\cos\frac{\theta}{3}+i\sqrt[6]{29}\sin\frac{\theta}{3}$$

其中

$$\cos\theta=\frac{5}{\sqrt{29}}\text{，}\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{29}}$$

現在由於棣美弗定理的幫忙，我們很容易可以接受上述的觀念。但是在十八世紀初期，數學家們一直還認爲將一個複數開方，如果開方的次數不同，那麼產生的結果應該是不同形式或不同次數的複數，他們並不知道結果可表成$a+bi$的形式。

例如，$\sqrt{2+3i}$ 和 $\sqrt[5]{2+3i}$ 在當時是被視爲不同形式的複數。

這種混沌現象後來被d′A lembert所澄清了。在 1747 年，d′A lembert在他的論文：*Réefℓexions sur ℓa cause géenéraℓe des vents*中證明每一個複數經過包括四則運算、開方、乘冪等代數運算後都可表成$A+B\sqrt{-1}$的形式。這裡比較難的部分，當推複數的複數次冪的證明，亦即$(a+bi)^{g+hi}=A+B\sqrt{-1}$ 的證明。

d′ Alembert 的證明後來又經過 Euler，Lagrange 等人的進一步補充。在 d′Alembert 的書 *Encyclopéedie* 中，d′ Alembert 對複數仍只是略爲提一提而已，著

墨不多。

## (八)複數地位的肯定

我們講過，整個十八世紀，複數在數學家的心目中一直是從屬的角色。大家都不認爲複數是真正的數，複數被視爲是沒有物理意義又缺乏幾何意義的東西。最多像Girard所說的，複數的搭配，可使我們的方程式的公式解具備完整性，可以適用於每一個二次或三次的方程式。或者像Euler所說的，當我們解一個事先不知有沒有答案的問題時，如果出現答案是複數，那麼至少讓我們知道此問題無解。綜觀十八世紀所有數學家對複數的看法，實在沒有一個數學家是千里馬「複數」的伯樂。

到了 1799 年，高斯提出了代數基本定理的第一次證明，證明過程中必須仰賴複數，此時複數才第一次從將近一百年的配角地位升格當主角。高斯就此將複數的地位確定了。此後一百年，十九世紀時，數學家才開始認真地利用複數，努力研究以複數爲變數的複數函數論。

(摘譯自：K line，M：*Mathematicaℓ Thought from A ncient to Modern Times* )